Exam Vectoranalyse

13 July 2012

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het maximaal aantal punten dat u kunt behalen is 100. U krijgt 10 punten gratis. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [**10+5+10 Punten.**]

   Laat S het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ zijn dat gegeven is door $f(x,y,z)=0$ waarbij $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^4-z-2$. Laat $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$.

   (a) Laat zien dat (x_0,y_0,z_0) een punt op het oppervlak S is, en bereken het raakvlak aan S in (x_0,y_0,z_0).

   (b) Laat zien dat $f(x,y,z)=0$ lokaal kan worden opgelost naar z, d.w.z. z kan beschouwd worden als een functie van x en y in de buurt van (x_0,y_0,z_0).

   (c) Beschouw de grafiek van een functie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Geef de formule voor het raakvlak aan de grafiek van g, in een punt op de grafiek van g. Laat expliciet zien dat voor de functie $z=g(x,y)$ gedefinieerd in onderdeel (b), het raakvlak aan zijn grafiek in $(x_0,y_0,g(x_0,y_0))$ gelijk is aan het raakvlak gevonden in onderdeel (a).

1. (English) [**10+5+10 Points.**]

   Let S be the surface in $\mathbb{R}^3$ defined by $f(x,y,z)=0$ where $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^4-z-2$. Let $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$.

   (a) Show that (x_0,y_0,z_0) is a point on the surface S, and find the tangent plane to the surface S at the point (x_0,y_0,z_0).

   (b) Show that $f(x,y,z)=0$ can locally be solved for z, i.e. z can be expressed as a function of x and y in some neighborhood of (x_0,y_0,z_0).

   (c) Consider the graph of a function $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Write down the formula satisfied by the tangent plane of the graph of g at a point on the graph of g. Show explicitly that for the function $z=g(x,y)$ defined in part (b), the tangent plane of its graph at $(x_0,y_0,g(x_0,y_0))$ coincides with the tangent plane found in part (a).

2. (Nederlands) [**8+8 Punten.**]

   Laat $u(x,y,z)$ een C^2 functie zijn. Door het definiëren van bolcoördinaten volgens $(x,y,z)=(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$, kan $u(x,y,z)$ als een functie $f(r,\varphi,\vartheta)$ worden beschouwd.

   (a) Druk $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$ uit in partiële afgeleiden naar x, y en z van de functie u.

(b) Neem aan dat de functie f in bolcoördinaten alleen maar van r afhangt (d.w.z. f is onafhankelijk van φ en ϑ). Laat zien dat in dit geval

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(r) = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r).$$

2. (English) **[8+8 Points.]**

Let $u(x,y,z)$ be a C^2 function. By defining spherical coordinates according to $(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$, the function $u(x,y,z)$ can be considered as a function $f(r,\varphi,\vartheta)$.

(a) Express $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ in terms of partial derivatives with respect to x, y and z of the function u.

(b) Suppose that the function f in spherical coordinates depends only on r (i.e. f is independent of φ and ϑ). Show that in this case

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(r) = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r).$$

3. (Nederlands) **[10+6+6+3 Punten.]**

Op $\mathbb{R}^3$ is het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (bxz - x^2)\,\mathbf{i} + ayz\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}.$$

(a) Verder zijn gegeven de punten $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,1,0)$ en $D = (1,1,1)$. Het pad γ bestaat uit de lijnsegmenten AB, BC en CD. Bereken

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

(b) Bepaal a en b zó dat het vectorveld $\mathbf{F}$ conservatief is.

(c) Bepaal voor de onder (b) gevonden waarden van a en b een potentiaalfunctie van $\mathbf{F}$.

(d) Laat zien dat de potentiaalfunctie uit onderdeel (c) gebruikt kan worden om de waarde van de padintegraal in onderdeel (a) uit te rekenen in het geval $\mathbf{F}$ conservatief is.

3. (English) **[10+6+6+3 Points.]**

Consider the vectorfield $\mathbf{F}$ on $\mathbb{R}^3$ given by

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (bxz - x^2)\,\mathbf{i} + ayz\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)\,\mathbf{k}.$$

(a) Consider moreover the points $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,1,0)$ and $D = (1,1,1)$. The path γ consists of the line segments AB, BC and CD. Compute

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

(b) Determine a and b in such a way that the vetorfield $\mathbf{F}$ is conservative.

(c) Determine for the values of a and b found in part (b) a potential function of $\mathbf{F}$.

(d) Show that the potential function in part (c) can be used to compute the value of the path integral in part (a) in the case where $\mathbf{F}$ is conservative.

4. (Nederlands) **[6+8+10 Punten.]**

Gegeven is een gladde functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, homogeen van de graad k, d.w.z.:

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z), \quad \text{voor alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ en } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Laat $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(a) Bewijs de *relatie van Euler*:

$$x\, f_x + y\, f_y + z\, f_z = k\, f.$$

Hint: neem de afgeleide van beide leden van (1) naar t, en neem daarna $t = 1$.

(b) Toon aan dat

$$\iiint_D \nabla^2 f\, dV = \iint_{\partial D} k f\, dS\,.$$

Hierbij is $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ de Laplaciaan van f.

(c) Laat

$$f(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2.$$

Bewijs dat

$$\iint_{\partial D} f\, dS = \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^{6} a_i\,.$$

Hint: maak gebruik van onderdeel (b) en $\iiint_D x^2\, dV = \iiint_D y^2\, dV = \iiint_D z^2\, dV = \frac{1}{3} \iiint_D x^2 + y^2 + z^2\, dV$.

4. (English) **[6+8+10 Points.]**

Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be a smooth function which is homogenous of degree k, i.e.

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z), \quad \text{for all } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ and } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Let $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(a) Prove the *Euler relation*:

$$x\, f_x + y\, f_y + z\, f_z = k\, f.$$

Hint: compute the derivative of (1) with respect to t, and fill in $t = 1$ afterwards.

(b) Show that

$$\iiint_D \nabla^2 f\, dV = \iint_{\partial D} k f\, dS\,.$$

Here $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ denotes the Laplacian of f.

(c) Let

$$f(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2\,.$$

Prove that

$$\iint_{\partial D} f\, dS = \frac{4\pi}{5} \sum_{i=1}^{6} a_i\,.$$

Hint: make use of part (b) and $\iiint_D x^2\, dV = \iiint_D y^2\, dV = \iiint_D z^2\, dV = \frac{1}{3} \iiint_D x^2 + y^2 + z^2\, dV$.